

Interpolation de signaux par conservation de la régularité Höldérienne

Pierrick LEGRAND^{1,3}, Jacques LÉVY VÉHEL^{1,2}

¹Projet Fractales, IRCCyN, 1 Rue de la Noë, B.P. 105, 44321 Nantes, France

²Projet Fractales, Inria, 78153 Le Chesnay Cedex, France

³LCPC, Route de Bouaye, BP4129 - 44341 Bouguenais cedex

{pierrick.legrand, vehel}@irccyn.ec-nantes.fr

Résumé – On considère le problème de l'interpolation d'un signal dans \mathbb{R}^d connu à une certaine résolution. On suppose que le signal appartient à une classe de signaux caractérisée par des contraintes sur la régularité locale, qui peuvent être traduites par un certain comportement inter-échelles des coefficients d'ondelette. Ces contraintes permettent de prédire les coefficients de l'échelle $n + 1$ à partir de ceux des échelles précédentes. Nous donnons quelques propriétés de cette technique d'interpolation, concernant en particulier la régularité Höldérienne du signal raffiné et son comportement asymptotique. Les résultats théoriques et numériques montrent que notre méthode permet d'obtenir des signaux ou des images interpolés de bonne qualité. En particulier, l'aspect visuel de régularité ou d'irrégularité est respecté après interpolation.

1 Introduction

Une préoccupation courante en traitement du signal et des images est l'obtention de données échantillonnées avec la meilleure résolution possible. A l'étape d'acquisition, la résolution est limitée par divers facteurs, tels que les propriétés physiques du capteur ou le coût. Il est donc utile de mettre au point des méthodes permettant d'améliorer la résolution après l'acquisition. Un cas favorable est celui où l'on dispose de plusieurs signaux de faible résolution se recouvrant partiellement. L'interpolation (aussi appelée *superrésolution* dans ce contexte) consiste alors à combiner ces multiples signaux basse résolution afin de former un signal haute résolution.

Dans le cas général, cependant, on ne dispose que d'un signal pour l'interpolation. Une approche naturelle consiste alors à compléter les informations issues du signal basse résolution par des connaissances *a priori*.

Diverses approches ont été proposées dans ce cadre. On peut grossièrement les séparer en deux types. Dans le premier, on suppose que le signal appartient à une certaine classe fonctionnelle. Par exemple, on admet que le signal original est à bande limitée, ou bien à support compact, Ces hypothèses imposent des contraintes sur l'interpolation qui, en pratique, est souvent obtenue en minimisant une fonction de coût composée de deux termes : le premier assure le fait que le signal reconstruit à haute résolution est compatible avec les données observées à basse résolution. Le second terme correspond à l'information *a priori* d'appartenance à la classe considérée. Parmi les très nombreux travaux qui suivent cette approche, citons [3, 4, 11, 12, 13, 14].

Le deuxième type d'approche constitue un nouveau paradigme, que l'on pourrait qualifier de *contextuel*. Il a été proposé récemment dans des travaux provenant de communautés diverses (vision par ordinateur, informatique graphique, IA)[2, 1, 5]. Il découle de l'observation du fait que la plupart des méthodes classiques ont tendance à trop lisser les signaux dès que

l'on atteint de fort taux d'interpolation (i.e. plus grand que 4). Les méthodes contextuelles essaient de remédier à ce problème en utilisant une technique "d'apprentissage local" : le système commence par créer une base de données en "apprenant" les caractéristiques locales de signaux pris dans une classe donnée, à laquelle on suppose que le signal à interpoler appartient aussi. Il utilise ensuite cette information pour calculer l'interpolation, en comparant les caractéristiques locales du signal à celle de la base de données. L'hypothèse sous-jacente est que des voisinages, dans les signaux de la même classe, qui se ressemblent à la résolution n , devraient se ressembler à la résolution $n + 1$.

La plupart des techniques développées jusqu'à maintenant souffrent d'un certain nombre de problèmes communs : le signal interpolé est souvent trop lisse, mais il arrive aussi parfois que trop de détails soient ajoutés, en particulier dans des régions régulières. De plus, la création de détails n'est pas bien contrôlée, et on ne peut en général prévoir quel sera l'aspect du signal haute résolution. Enfin, les propriétés théoriques de la méthode sont rarement connus.

Nous proposons une nouvelle méthode d'interpolation dont la caractéristique principale est de conserver l'aspect visuel aussi bien des régions lisses que des régions irrégulières (e.g. ruptures ou textures). Notre outil principal est l'analyse de la régularité locale : nous commençons par définir une mesure de cette régularité locale qui rend raisonnablement compte de l'aspect visuel tout en étant aisément manipulable mathématiquement. Cette mesure correspond, à quelques restrictions techniques près, à la notion d'exposant de Hölder. Il a été montré que les exposants de Hölder correspondent à une notion intuitive de la régularité pour les images et les signaux 1D [7].

Afin de contrôler l'interpolation et d'obtenir une implémentation simple, nous avons besoin de supposer que le signal appartient à une certaine classe de signaux, qui est assez générale. Cette hypothèse permet d'estimer facilement l'exposant de Hölder à partir des coefficients d'ondelette, et assure de plus

que cet exposant permet de prédire de façon pertinente les coefficients des échelles plus fines.

Notre méthode permet alors de contrôler à la fois la régularité du signal interpolé et l'erreur de reconstruction. Ces deux propriétés sont importantes en pratique : la régularité détermine l'apparence visuelle de l'information ajoutée (c'est à dire le contenu hautes fréquences), et la convergence de l'interpolation signifie que l'information ajoutée n'est pas trop différente de la réalité.

Nous expliquons maintenant heuristiquement le principe de notre méthode. Soit X le signal d'entrée et $d_{j,k}$ ses coefficients d'ondelette, où j correspond aux échelles et k à la position. Si un signal a la régularité α au point t , alors ses coefficients d'ondelette $d_{j,k(j,t)}$ "au-dessus" de t sont bornés par $C2^{-j\alpha}$ où C est une constante : $\forall j = 1 \dots n, |d_{j,k(j,t)}| \leq C2^{-j\alpha}$. L'exposant α mesure la régularité dans le sens suivant : $\alpha > 1$ traduit un signal lisse, tandis que $\alpha \in]0, 1[$ signifie que le signal est continu et non différentiable en t . Si le signal est discontinu en t mais borné, alors $\alpha = 0$.

Ainsi, si nous souhaitons préserver la régularité, nous devons imposer le coefficient d'ondelette au dessus de t à l'échelle super-résolue $n+1$ de telle sorte que $|d_{n+1,k(n+1,t)}| \leq C2^{-(n+1)\alpha}$.

2 Méthode

Soit X le signal original, et $X_n = (x_1^n, \dots, x_{2^n}^n)$ son échantillonnage sur les 2^n points $(t_1^n, \dots, t_{2^n}^n)$. Soit ψ une ondelette telle que la famille $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forme une base orthonormale de L^2 . Soient $d_{j,k}$ les coefficients d'ondelette de X . Pour $k = 1 \dots 2^n$, on considère le point $t = t_k^n$ et $d_{j,k(j,t)}$ les coefficients d'ondelette situés "au-dessus" de lui, i.e. $k(j,t) = E((t-1)2^{j+1-n})$ (E est la partie entière). Soit $\alpha_n(t)$ la pente de la régression \liminf du vecteur $(\log(d_{1,k(1,t)}, \dots, d_{n,k(n,t)}))$ selon $(-1, \dots, -n)$ (voir [6] pour les régressions de type \liminf). Lorsque n tend vers l'infini, $\alpha_n(t)$ tend vers $\liminf \frac{\log d_{n,k(n,t)}}{-n}$. Ce nombre a été considéré dans la littérature [10] sous le nom d'exposant de *weak scaling*, et noté β_w . Il s'agit d'une mesure de la régularité locale dans le sens suivant. L'exposant de *weak scaling* du signal X en t_0 est défini par :

$$\beta_w = \sup\{s : \exists n, X^{(-n)} \in C_{t_0}^{s+n}\}$$

où $X^{(-l)}$ représente une primitive d'ordre l de X et $C_{t_0}^s$ l'espace de Hölder ponctuel en t_0 . Lorsque les exposants de Hölder local α_l et ponctuel α_p de X en t coïncident¹, alors β_w est aussi égal à leur valeur commune (voir [9]). Dans la suite nous supposons que nous sommes dans cette configuration. En d'autres termes, on considère que notre signal appartient à la classe \mathcal{S} définie de la manière suivante :

$$\mathcal{S} = \{X \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \alpha_p(t) = \alpha_l(t)\}$$

La classe \mathcal{S} paraîtra probablement abstraite. Mentionnons simplement qu'elle contient de nombreux signaux et images "usuels", comme par exemple tous les signaux infiniment lisses (i.e. dans C^∞) ainsi que les signaux à irrégularités isolées du type $\sum_{n \in \mathbb{N}} |t - t_n|^{\gamma_n}$, avec $t_n \in \mathbb{R}, \gamma_n \in \mathbb{R}^+$. Un

¹Rappelons que $\alpha_l^X(t) = \inf\{\alpha : \exists \delta > 0, X \in C^\alpha([t-\delta, t+\delta])\}$ et que $\alpha_p^X(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log |X(t+h) - P_t(h)|}{\log |h|}$, où P_t est un polynôme de degré inférieur ou égal à $E(\alpha_p^X(t))$

grand nombre de signaux partout irréguliers, tels que la fonction de Weierstrass $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-nh} \sin(2^n t)$, $h \in (0, 1)$, appartiennent à \mathcal{S} . Par contre, les signaux de type "chirp", de la forme $|t|^\gamma \sin(1/|t|^\beta)$, $\gamma > 0, \beta > 0$ ne sont pas dans \mathcal{S} .

Le moyen le plus facile de se représenter les éléments de \mathcal{S} est peut-être de considérer leur transformée en ondelette : en chaque point t , les "plus gros" coefficients sont situés au-dessus de t dans le sens suivant. Considérons une suite $d_{j,k}$ de coefficients telle que $k2^{-j}$ tend vers t . Alors, si X appartient à \mathcal{S} ,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |d_{j,k}|}{-j} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |d_{j,k(j,t)}|}{-j}$$

Pour réaliser l'interpolation, on effectue au-dessus de chaque point t la régression des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle. Les paramètres de cette régression permettent de construire le coefficient extrapolé. Après reconstruction, on obtient ainsi le signal "superrésolu".

3 Régularité et propriétés asymptotiques

Nous donnons deux propriétés de notre méthode d'interpolation. Voir [8] pour les preuves. On note C^η l'espace de Hölder d'exposant η , et $B_{p,q}^s$ l'espace de Besov d'exposants (s, p, q) . Pour un signal échantillonné X_n , on note \tilde{X}_n le signal interpolé sur une infinité de niveaux.

Proposition

Soit X un signal de C^η pour un $\eta > 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$, tout p et tout $t \in (t_p^n, t_{p+1}^n)$, $\alpha_p^{\tilde{X}_n}(t) = \alpha_l^{\tilde{X}_n}(t) \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$, où $\beta = \min(\beta_w(t_p^n), \beta_w(t_{p+1}^n))$.

Proposition

Soit X un élément de \mathcal{S} , et supposons que $X \in C^\alpha$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow \|X - \tilde{X}_n\|_2 = \mathcal{O}(2^{-n(\alpha-\varepsilon)})$. De plus, $\|X - \tilde{X}_n\|_{B_{p,q}^s} = \mathcal{O}(2^{-n(\alpha-s-\varepsilon)})$ pour tout $s < \alpha - \varepsilon$.

Ainsi, l'interpolation conserve la régularité locale du signal : une zone lisse (resp. irrégulière) reste lisse (resp. irrégulière) après sur-échantillonnage. D'autre part, l'erreur entre le signal interpolé et le "vrai" signal tend vers 0 à une vitesse qui dépend de la régularité globale de X .

4 Résultats numériques

Nous présentons tout d'abord les résultats obtenus sur un signal mono-dimensionnel. Il s'agit d'un profil routier fourni par le LCPC de Nantes, dans le cadre d'une étude sur le frottement pneumatique-chaussée. L'application de la méthode sur un profil routier permet de compenser l'impossibilité, pour le capteur, de mesurer les échelles les plus fines du profil, qui sont néanmoins importantes pour caractériser le frottement. Une particularité de ces profils est qu'ils comportent à la fois des zones lisses (comme sur la figure 2) et des parties irrégulières (figure 1). Comme on le voit sur les figures, l'interpolation a ajouté de nombreux détails sur la zone irrégulière, alors que la zone lisse n'a pas été perturbée par l'ajout de hautes fréquences.

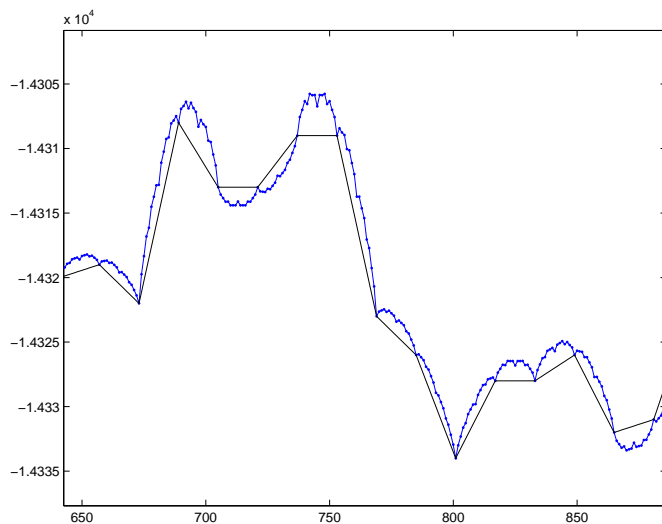


FIG. 1: Interpolation d'un facteur 16 d'une partie irrégulière d'un profil routier (original en pointillés). De nombreux détails ont été ajoutés.

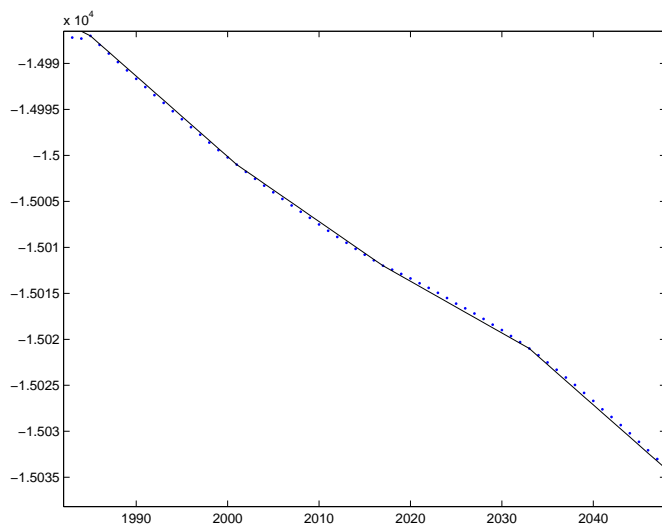


FIG. 2: Interpolation d'un facteur 16 d'une partie régulière d'un profil routier (original en pointillés). Le caractère lisse a été conservé.

Le dernier exemple est une image représentant une porte japonaise, dont un détail est zoomé par un facteur 8. Notre méthode est comparée à une interpolation bicubique (figures 4, 5, 6 et 7). On peut remarquer que, par rapport à notre méthode, l'interpolation bicubique induit plus de perturbations le long des contours, tout en lissant trop l'image dans certaines zones.

Références

- [1] S. BAKER, T. KANADE, *Super-resolution: Reconstruction of Recognition*, Proc. of IEEE-Eurasip Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, **2001**, pp. 349-385.
- [2] F.M. CANDOCIA, J.C. PRINCIPE, *Superresolutions of images based on local correlations*, IEEE Tr. Neural Networks, Vol. 10, No. 2, March **1999**, pp. 372-380.
- [3] D.L. DONOHO, P. B. STARCK, *Uncertainty Principles and Signal Recovery*, SIAM J. App. Math. 49, **3 (1989)**, pp. 906-931.
- [4] P.J.S.G. FERREIRA, *Noniterative and faster iterative for interpolation and extrapolation*, IEEE Tr. Sig. Proc. **42(11)**, 1994, pp. 3278-3282.
- [5] W.T. FREEMAN, T.R. JONES, E.C. PAZSTOR, *Example-Based Super-Resolution*, MERL Tech. Rep. 2001-30, **2001**.
- [6] P. LEGRAND, J. LÉVY VÉHEL, *Signal Processing with FracLab* Preprint
- [7] J. LÉVY VÉHEL, *Fractal Approaches in Signal Processing*, Fractals, **3(4) (1995)**, pp. 755-775.
- [8] J. LÉVY VÉHEL, P. LEGRAND *A Hölder regularity-based approach to signal and image interpolation*, preprint.
- [9] J. LÉVY VÉHEL, S. SEURET *The 2-microlocal formalism*, preprint.
- [10] Y. MEYER, *Wavelets, Vibrations and Scalings*, American Mathematical Society, **9 (1997)**, CRM Monograph Series.
- [11] A. PAPOULIS, *A new algorithm in spectral analysis and bandlimited extrapolation*, IEEE Tr. Circuits Syst. **22(9)**, 1975, pp. 735-742.
- [12] M.I. SEZAN, H. STARK, *Image restoration by the method of convex projection: Part II - applications and numerical results*, IEEE Tr. Med. Imag. **1(2)**, 1982, pp. 95-101.
- [13] D. SLEPIAN, H.O. POLLAK, *Prolate spheroidal functions, Fourier analysis and uncertainty - I*, Bell Syst. Tech. J. **40(1)**, 1961, pp. 43-63.
- [14] D.C. YOULA, H. WEBB, *Image restoration by the method of convex projections: Part I - theory*, IEEE Tr. Med. Imag. **1(2)**, 1982, pp. 81-94.

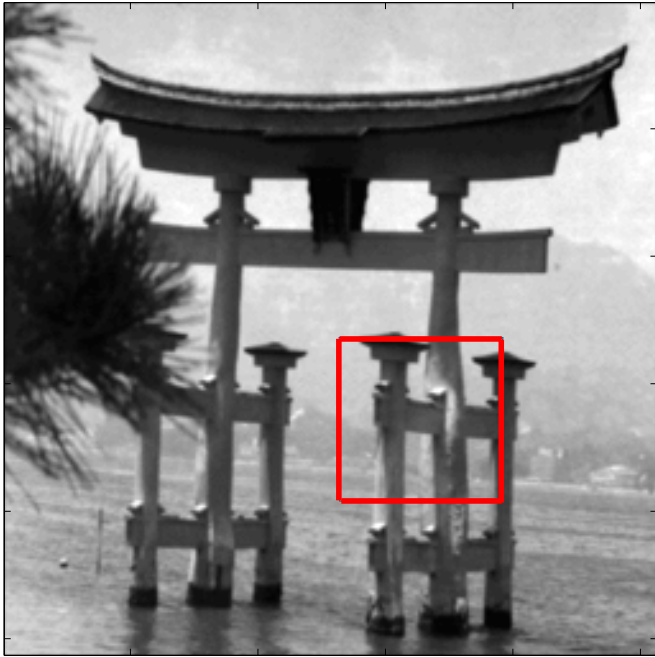


FIG. 3: Image de porte japonaise. On a encadré en rouge la zone de l'image sur laquelle nous allons travailler par la suite.



FIG. 5: Zoom d'un facteur 8 par interpolation bicubique.

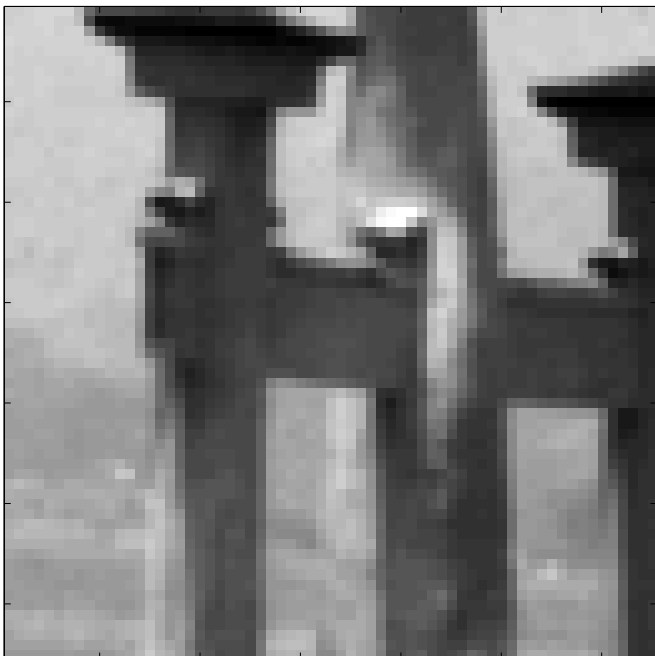


FIG. 4: Détail de l'image qui va être sur-échantillonné.



FIG. 6: Zoom d'un facteur 8 par conservation de la régularité Hölderienne.